UNIVERSITE DE CERGY-POINTOISE

L2 ECO-FIN-G

Cours de Probabilités.

Imèd CHERIF

TD 1

Exercice 1 : Soit $E = \{0,1,2\}$.

Déterminer $\mathcal{P}(E)$, la famille de toutes les parties de E.

Exercice 2 : Soit $E = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

Déterminer $\mathcal{P}(E)$, la famille de toutes les parties de E.

Exercice 3 : Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$. Soit $A = \{a,b\}, B = \{b,d,e\}$ et $C = \{a,e\}$.

Déterminer : $\boxed{1}\ A \cup B$, $\boxed{2}\ A \cap B$, $\boxed{3}\ \overline{A}$, $\boxed{4}\ A \backslash B$, $\boxed{5}\ A \cap \overline{B}$, $\boxed{6}\ (A \cup B) \cup C$, $\boxed{7}\ A \cup (B \cup C)$, $\boxed{8}\ (A \cap B) \cap C$, $\boxed{9}\ A \cap (B \cap C)$, $\boxed{10}\ A \cap (B \cup C)$, $\boxed{11}\ (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\boxed{12}\ A \cup (B \cap C)$, $\boxed{13}\ (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\boxed{14}\ \overline{A \cup B}$, $\boxed{15}\ \overline{A} \cap \overline{B}$, $\boxed{16}\ \overline{A \cap B}$, $\boxed{17}\ \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 4 : Soit E un ensemble. Soit A, B et C trois sous-ensembles de E.

Montrer que :

$\boxed{1}\ A \subset A \cup B$ $\boxed{2}\ A \cap B \subset A$ $\boxed{3}\ A \cup A = A$ $\boxed{4}\ A \cap A = A$ $\boxed{5}\ A \cup E = E$ $\boxed{6}\ A \cap E = A$ $\boxed{7}\ A \cup \varnothing = A$ $\boxed{8}\ A \cap \varnothing = \varnothing$ $\boxed{9}\ A \cup B = B \cup A$ $\boxed{10}\ A \cap B = B \cap A$

$\boxed{11}\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\boxed{12}\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$\boxed{13}\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\boxed{14}\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\boxed{15}\ \overline{\overline{A}} = A$

$\boxed{16}\ \overline{\varnothing} = E$ $\boxed{17}\ \overline{E} = \varnothing$ $\boxed{18}\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\boxed{19}\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 5 : Soit E un ensemble. Soit A et B deux sous-ensembles de E.

On pose $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Montrer que: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

En déduire que : $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Exercice 6 : Soit $E = [1,2]$ et $F = [3,4]$.

Déterminer et tracer les produits cartésien $E \times F$ et $F \times E$.

On rappelle que :

$A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ \underline{ou} } x \in B\}$, $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ \underline{et} } x \in B\}$,

$A \backslash B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ \underline{et} } x \notin B\}$, $\overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$.

UNIVERSITE DE CERGY-POINTOISE. L2 ECO-FIN-G

Cours de Probabilités. Imèd CHERIF

TD 2

Exercice 1 : 1) Soit $f : IR \to IR$, $x \mapsto |x|$. Montrer que f est une application qui n'est ni injective, ni surjective ni bijective.

2) Soit $g : IR_+ \to IR$, $x \mapsto |x|$. Montrer que g est une application injective qui n'est ni surjective ni bijective.

3) Soit $h : IR \to IR_+$, $x \mapsto |x|$. Montrer que h est une application surjective qui n'est ni injective ni bijective.

4) Soit $\sigma : IR_+ \to IR_+$, $x \mapsto |x|$. Montrer que σ est une application bijective.

Exercice 2 : Soit $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2,3\}$.

1) Soit $f : E \to F$ t.q. $f(a) = 2$ et $f(b) = 1$. f est-elle une application ? injection ? surjection ? bijection ?

2) Soit $g : E \to F$ t.q. $g(a) = \{1,2\}$, $g(b) = 3$ et $g(c) = 3$. f est-elle une application ? injection ? surjection ? bijection ?

3) Soit $h : E \to F$ t.q. $h(a) = 2$, $h(b) = 1$ et $h(c) = 2$. f est-elle une application ? injection ? surjection ? bijection ?

Exercice 3 : Soit $E = \{a,b\}$ et $F = \{1,2,3\}$.

Soit $f : E \to F$ t.q. $f(a) = 2$ et $f(b) = 1$. f est-elle une application ? injection ? surjection ? bijection ?

Exercice 4 : Soit $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2\}$.

Soit $f : E \to F$ t.q. $f(a) = 2$, $f(b) = 1$ et $f(c) = 2$. f est-elle une application ? injection ? surjection ? bijection ?

Exercice 5 : 1) Soit $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2\}$. Peut-on construire une application injective $f : E \to F$.

2) Soit $E = \{a,b\}$ et $F = \{1,2,3\}$. Peut-on construire une application surjective $f : E \to F$.

3) Soit $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2,3\}$. Construire une application bijective $f : E \to F$.

Exercice 6 : Soit E un ensemble. On dit que E est un ensemble fini si :

il existe un entier naturel n et il existe une application bijective de $[|1,n|]$ vers E. (n est le nombre d'élément de E). On note $n = card(E)$.

On rappelle que si A et B sont deux sous-ensembles de E disjoints ($A \subset E, B \subset E$ avec $A \cap B = \varnothing$) alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.

1) Soit A un sous-ensemble de E. Montrer que : $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$.

2) Soit A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que :

$card(B) = card(B \setminus A) + card(A \cap B)$.

En déduire que : $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

3) Soit A, B et C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

$card(A \cup B \cup C) =$

$card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$

UNIVERSITE DE CERGY-POINTOISE.
L2 ECO-FIN-G
Cours de Probabilités.
Imèd CHERIF

TD 3

Exercice 1 : Une puce se déplace sur un cube. Chaque déplacement la méne d'un sommet à l'autre relié par une arête. Elle fait n déplacements en tout. Combien y a-t-il de trajets possibles ?

Exercice 2 :

1) De combien de manière peut-on ranger cinq objets différents dans trois boîtes. Chaque boîte pouvant contenir au plus 13 objets ?

2) De combien de manière peut-on ranger p objets différents dans n boîtes. Chaque boîte pouvant contenir autant d'objets que l'on veut ?

Exercice 3 : En utilisant l'alphabet usuel de 26 lettres (20 consonnes et 6 voyelles), combien peut-on former de mots de cinq lettres (ayant un sens ou non) dans la quelle figurent dans l'ordre une consonne, une voyelle, deux consonnes et enfin une voyelle ?

Exercice 4 :

1) Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts avec les chiffres 1 à 6 ?
2) Combien peut-on former de nombres de six chiffres distincts avec les chiffres 1 à 6 ?
3) Combien peut-on former de nombres de six chiffres avec les chiffres 1, 1, 2, 2, 2, 3 ?

Exercice 5 :

Combien peut-on former d'anagrammes distincs avec les lettres du mots MATHEMATIQUE ?

Exercice 6 : On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant que des cartes rouges ?
3) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant deux carrés (un carré est un ensembles de 4 cartes de même hauteur, par exemple, qutres as) ?

Exercice 7 : Soit n et p deux entiers naturels non nuls avec $p \leq n$.
Montrer que $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$.

Exercice 8 : On rappelle que pour tout réels a et b et tout entier naturel n : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^p b^{n-p}$.

Soit E un ensemble fini de cardinal n, $n \in IN$. Montrer que $\mathcal{P}(E)$, la famille de toutes les parties de E est de cardinal égale à 2^n.

Exercice 9 : Soit E un ensemble fini de cardinal n, $n \in IN$. Montrer que le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que $A \subset B$ est égale à 3^n.

Université de Cergy-Pontoise
Cours de Probabilités
I. Chérif
L2 Eco-Gestion

TD 4

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble fondamental puis calculer son cardinal pour chacune des épreuves aléatoires suivantes :

1) Jet d'une pièce de monnaie.
2) Lacer d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.
3) Tirage simultané de k boules dans une urne contenant n boules ($n \geq k$).
4) Tirage une à une et sans remise de k boules dans une urne contenant n boules ($n \geq k$).
5) Tirage une à une et avec remise de k boules dans une urne contenant n boules.
6) Jet d'une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention de "pile" pour la première fois, en comptant le nombre de jets.
7) Durée de vie d'un livre de maths.
8) Jet de deux dés de tailles (ou couleurs , ...) différentes.
9) Jet de deux dés parfaitement identiques.

Exercice 2 :

On extrait au hasard, un jeton d'une urne contenant 9 jetons numérotés de 1 à 9.

1) Déterminer l'ensemble fondamental associé à cet épreuve aléatoire.
2) Décrire en extension les événements suivants :

A : "le numéro sorti est un entier pair".
B : "le numéro sorti est un multiple de 3".

3) Décrire en compréhension (par une phrase) et en extention les événements suivants :

$\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$.

Exercice 3 :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

1) Montrer que $P(\varnothing) = 0$.
2) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ($A \subset \Omega$).
Montrer que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $A \subset B$.
Montrer que : $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
4) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Montrer que : $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
5) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ trois événements deux à deux incompatibles.
Montrer que : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.
6) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Montrer que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Université de Cergy-Pontoise
Cours de Probabilités
I. Chérif
L2 Eco-Gestion

TD 5

Exercice 1 :

On dispose d'un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité de l'événement : " le résultat du lancer est i ".

1) Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sachant que :
$p_2 = p_1, p_3 = 3p_1, p_4 = 2p_1, p_5 = 2p_1$ et $p_6 = 2p_3$.

2) Calculer la probabilité de l'événement A : "obtenir un numéro pair".

Exercice 2 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : "la carte tirée est la dame de pique".

B : "la carte tirée est une figure (roi, dame ou valet)".

C : "la carte tirée est un dix rouge".

Exercice 3 :

Un démarcheur à domicile vend des encyclopédies. Sa commission sur la vente d'une encyclopédie est de 50 euros. Ses frais de déplacement sont de 60 euros par jour. le nombre d'encyclopédies vendues par jour peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités correspondantes de
0.1, 0.1, 0.15, 0.25, 0.2 et 0.2.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : " obtenir un déficit à la fin de la journée ".

B : " obtenir des bénéfices à la fin de la journée ";

C : " obtenir un gain d'au moins 80 euros à la fin de la journée ".

Exercice 4 :

Quelle est la probabilité qu'une main de 8 cartes tirées au hasard d'un jeu de 32 cartes contienne au moins un roi ?

Exercice 5 :

1) On lance deux dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
calculer la probabilité d'obtenir un total de 10.

2) On lance deux dés parfaitement identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
calculer la probabilité d'obtenir un total de 10.

Exercice 6 :

On tire au hasard deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
on considère l'événement A :" les deux cartes sont des piques"
Calculer la probabilité de A dans les 3 cas suivants :

1) les deux cartes sont tirées simultanément.
2) les deux cartes sont tirées une à une sans remise.
3) les deux cartes sont tirées une à une avec remise.

Exercice 7 :

Un sac contient 9 boules indiscernables au toucher. 4 boules sont blanches et numérotées de 1 à 4. 5 boules sont noires et numérotées de 1 à 5.

On tire simultanément trois boules du sac; Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : " toutes les boules sont blanches ".

B : " les boules sont de couleurs différentes ".

C : " les numéros des boules sont impairs "

Université de Cergy-Pontoise
Cours de Probabilités
I. Chérif
L2 Eco-Gestion

TD 6

Exercice 1 :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements. Montrer les équivalences suivantes :

i) A et B sont P-indépndants.

$\Updownarrow$

ii) A et $\overline{B}$ sont P-indépndants.

$\Updownarrow$

iii) $\overline{A}$ et B sont P-indépndants.

$\Updownarrow$

iv) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont P-indépndants.

Exercice 2 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Dire si les événements A et B sont P-indépendants.

1) A : tirer une dame ; B : tirer une noir.

2) A : tirer une dame ; B : tirer une figure.

Exercice 3 :

La publicité d'un nouveau véhicule automobile est axée sur la fiabilité. "Pas de grosse réparation avant 100 000 km" affirme-t-on dans un dépliant publicitaire. Néanmoins, les services techniques du constructeur ont établi qu'avant 100 000 km, la probabilité d'avoir une rupture de cardan est $p_1 = 0,01$, celle d'avoir une réparation importante du moteur à faire est $p_2 = 0,05$, celle d'avoir l'embrayage à changer est $p_3 = 0,01$, celle d'avoir les freins à réparer est $p_4 = 0,013$ et celle d'avoir la boîte de vitesse défaillante est $p_5 = 0,003$.

On admettra que ces différentes pannes définisssent des événements mutuellement indépendants. Déterminer la probabilité de l'événement "la voiture n'a subi aucune réparation avant 100 000 ".

Exercice 4 :

Une urne contient 5 boules : 3 rouges numérotées 1, 2 ,3 et 2 noires numérotées 1 et 2. On tire au hasard et simultanément 2 boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité de l'événement A :"les 2 boules sont de la même couleur" ,

2) Quelle est la probabilité de l'événement B :"la somme des numéros est égale à 3" ?

3) Quelle est la probabilité de l'événement :"B sachant A" ?

Exercice 5 :

Une usine dispose de 4 machines A, B, C et D qui fabriquent respectivement 10, 20, 30 et 40 pour cent de la production totale. La probabilité qu'un objet défectueux soit produit par A, B, C ou D est respectivement 0.06, 0.05, 0.03 et 0.01.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1) E : "le produit est défectueux".

2) F : "le produit défectueux provienne de la machine A".

3) G : "le produit non défectueux provienne de la machine C".

Exercice 6 :

Dans un QCM, un candidat doit cocher une réponse parmi m = 10 réponses possibles. Sachant qu'il a la probabilité p=0.3 de connaître la réponse et que s'il l'ignore il répond au hasard. Quelle est la probabilité d'un candidant ayant répondu correctement à une question connaisse la réponse.

Université de Cergy-Pontoise
Cours de Probabilités
I. Chérif
L2 Eco-Gestion

TD 7

Exercice 1 :

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire au hasard une boule et on observe le numéro qu'elle porte.

1) Déterminer l'espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$ et la variable aléatoire réelle X associés à cette épreuve aléatoire.
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle X;
3) Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. X puis tracer son graphe.
4) Calculer son espérance mathématique, $E(X)$, et sa variance, V(X).

Exercice 2 :

Une urne contient trois boules vertes , deux boules oranges et quatre boules rouges. On tire simultanément deux boules de l'urne. Une boule verte fait gagner 2 points, un boule orange fait gagner 1 point et une boule rouge fait perdre 3 points. On note X la variabe aéatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de points obtenus.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X.
2) Déterminer la loi de la v.a.r. X.
3) Calculer son espérance mathématique, $E(X)$, et a variance, V(X).

Exercice 3 :

Un ac contient 4 jetons rouges et 4 jetons verts. On tire simultanément 4 jetons du sac. Soit X la v.a.r. qui à chaque tirage associe le nombre de jetons verts tirés.

1) Déterminer la loi de la v.a.r. X.
2) Calculer son espérance mathématique, $E(X)$, et a variance, V(X).

Exercice 4 :

Une urne contient deux boules : une rouge et une bleue. On prélève une boule au hasard dans cette urne. Si on obtient une boule rouge on a gagné ; si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne accompagnée d'une autre boule bleue identique. On procède à un nouveau tirage dans l'urne qui contient alors 3 boules : une rouge et 2 bleues. Si on obtient une boule rouge on a gagné ; si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne accompagnée d'une autre boule bleue identique, puis on procède à un nouveau tirage et ainsi de suite.

Soit X la variable aléatoire égale au numèro du tirage de la boule rouge.

1) Déterminer l'ensembe des valeurs prises par la v.a.r. X.
2) Déterminer la loi de la v.a.r. X.
3) Calculer son espérance mathématique, $E(X)$, et a variance, V(X)

Exercice 5 :

Soit X le nombre de voitures qui passent entre 17h et 18h en un point donné d'une autoroute. On a observé que le nombre moyen de voitures est E(X) = 4 000 et que la variance est V(X) = 100 000.

Donner une minoration de la probabilité de l'événement " le nombre de voitures est stricement compris entre 3 500 et 4 500.

TD 8

Exercice 1 : Dans un concours de "pigeons d'argile" un tireur a droit à 2 coups (supposés indépendants). A chaque coup il a une probabilité de 0.8 d'atteindre la cible.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne en deux coups une fois et une seule la cible ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne en deux coups au moins une fois la cible ?

Exercice 2 : On considère un jeu de 32 cartes. On tire une carte au hasard, on note sa couleur (pique, carreau, ...) et on la replace dans le jeu. On répète 4 fois cette épreuve dans les mêmes conditions (les 4 épreuves sont donc indépendantes).

Soit Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tréfles obtenus lors des 4 tirages. Déterminer la loi de Z puis calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 3 : On dispose d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.

A-t-on plus de chance d'obtenir au moins 1 fois 6 en jetant le dé 6 fois que d'avoir au moins 2 fois 6 en jetant le dé 12 fois ?

Exercice 4 : On joue à "pile ou face" avec une pièce truquée. La probabilité d'avoir "face" est de 0.1 ; la probabilité d'avoir "pile" est de 0.9.

soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de "face" au cours de 20 jets.

1) Déterminer la loi de X.
2) Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 fois "face".

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramétre m, $m>0$.

1) Si $P(X=1) = P(X=2)$, quelle est la probabilité que $X \leq 5$.
2) Si $P(X=3) = 0.0521$ et $P(X=2) = 0.0223$, quelle est la probabilité que $3 \leq X \leq 8$.

Exercice 6 : Les appels téléphoniques arrivent à un taux de 48 appels par heure au bureau des réservations de la SNCF.

1) Déterminer la probabilité de recevoir exactement 3 appels dans un intervalle de 5 minutes.
2) Déterminer la probabilité de recevoir exactement 5 appels dans un intervalle de 10 minutes.
3) Si l'employé met 5 minutes pour répondre à un appel en cours, combien de personnes -en moyenne - attendront pendant ce temps ?
4) Quelle est la probabilité que l'employé puisse prendre 3 minutes de repos sans être déranger ?

Exercice 7 : Rappelons que le jeu de bridge comprend 52 cartes dont 4 as et que chaque main comporte 13 cartes.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de as dans une main.

1) Déterminer la loi de X.
2) Calculer la probabilité de présence d'au moins 2 as dans une main.

Exercice 8 : Une princesse est retenue prisonnière dans un château. Un prince charmant se présente pour tenter de la libérer. Il entre dans la cour du château et se trouve alors devant 3 portes, il en choisit une au hasard. Or,s'il ouvre la première porte, il découvre la princesse et parvient à la libérer ; s'il ouvre la deuxième, il tombe nez à nez avec un dragon qui le dévore ; et s'il ouvre la troisième porte, il rencontre une sorcière qui le reconduit au dehors après l'avoir forcé à boire un philtre qui lui fait perdre la mémoire de ce qu'il a vu au château.

La prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou qu'il périsse.

1) a. Quelle est la probabilité que le prince réussisse à délivrer la princesse ?

1) b. Quelle est le nombre moyen de tentatives que le prince peut et doit effectuer ?

2) Si le prince succombe avant d'avoir réussi à délivrer la princesse, un autre se présente aussitôt pour tenter d'accomplir cette mission et ainsi de suite ...

Quel est le nombre moyen de princes nécessaire pour parvenir à délivrer la princesse ?

LOI BINOMIALE

Effectif des échantillons n = 5

k	$p = 1\,\%$	$p = 2\,\%$	$p = 3\,\%$	$p = 4\,\%$	$p = 5\,\%$	$p = 6\,\%$	$p = 7\,\%$	$p = 8\,\%$	$p = 9\,\%$	$p = 10\,\%$
	Probabilités individuelles $Pr(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$									
0	0,9510	0,9039	0,8587	0,8153	0,7738	0,7339	0,6957	0,6591	0,6240	0,5905
1	0,0480	0,0922	0,1328	0,1699	0,2036	0,2342	0,2618	0,2865	0,3086	0,3280
2	0,0010	0,0038	0,0082	0,0142	0,0214	0,0299	0,0394	0,0498	0,0610	0,0729
3			0,0003	0,0006	0,0011	0,0019	0,0030	0,0043	0,0060	0,0081
4							0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
c	Probabilités cumulées $Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$									
	$p = 1\,\%$	$p = 2\,\%$	$p = 3\,\%$	$p = 4\,\%$	$p = 5\,\%$	$p = 6\,\%$	$p = 7\,\%$	$p = 8\,\%$	$p = 9\,\%$	$p = 10\,\%$
0	0,9510	0,9039	0,8587	0,8153	0,7738	0,7339	0,6957	0,6591	0,6240	0,5905
1	0,9990	0,9962	0,9915	0,9852	0,9774	0,9681	0,9575	0,9466	0,9326	0,9185
2	1	:	0,9997	0,9994	0,9988	0,9980	0,9969	0,9955	0,9937	0,9914
3			1	1	1	1	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995
4							1	1	1	1

Effectif des échantillons n = 10

k	$p = 1\,\%$	$p = 2\,\%$	$p = 3\,\%$	$p = 4\,\%$	$p = 5\,\%$	$p = 6\,\%$	$p = 7\,\%$	$p = 8\,\%$	$p = 9\,\%$	$p = 10\,\%$
	Probabilités individuelles $Pr(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$									
0	0,9044	0,8171	0,7374	0,6648	0,5987	0,5386	0,4840	0,4344	0,3894	0,3487
1	0,0914	0,1667	0,2281	0,2770	0,3151	0,3438	0,3643	0,3777	0,3851	0,3874
2	0,0042	0,0153	0,0317	0,0519	0,0746	0,0988	0,1234	0,1478	0,1714	0,1937
3	0,0001	0,0008	0,0026	0,0058	0,0105	0,0168	0,0248	0,0343	0,0452	0,0574
4			0,0001	0,0004	0,0010	0,0019	0,0033	0,0052	0,0078	0,0112
5					0,0001	0,0001	0,0003	0,0005	0,0009	0,0015
6									0,0001	0,0001
c	Probabilités cumulées $Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$									
	$p = 1\,\%$	$p = 2\,\%$	$p = 3\,\%$	$p = 4\,\%$	$p = 5\,\%$	$p = 6\,\%$	$p = 7\,\%$	$p = 8\,\%$	$p = 9\,\%$	$p = 10\,\%$
0	0,9044	0,8171	0,7374	0,6648	0,5987	0,5386	0,4840	0,4344	0,3894	0,3487
1	0,9957	0,9838	0,9655	0,9418	0,9139	0,8824	0,8483	0,8121	0,7746	0,7361
2	0,9999	0,9991	0,9972	0,9938	0,9885	0,9812	0,9717	0,9599	0,9460	0,9298
3	1	1	0,9999	0,9996	0,9990	0,9980	0,9964	0,9942	0,9912	0,9872
4			1	1	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9990	0,9984
5					1	1	1	1	0,9999	0,9999
6									1	1

TABLE 1 (SUITE)

LOI BINOMIALE

Effectif des échantillons n = 15

k	Probabilités individuelles $Pr(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$									
	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0,8601	0,7386	0,6333	0,5421	0,4633	0,3953	0,3367	0,2863	0,2430	0,2059
1	0,1303	0,2261	0,2938	0,3388	0,3658	0,3785	0,3801	0,3734	0,3605	0,3432
2	0,0092	0,0323	0,0636	0,0988	0,1348	0,1691	0,2003	0,2273	0,2496	0,2669
3	0,0004	0,0029	0,0085	0,0178	0,0307	0,0468	0,0653	0,0857	0,1070	0,1285
4		0,0002	0,0008	0,0022	0,0049	0,0090	0,0148	0,0223	0,0317	0,0428
5			0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0024	0,0043	0,0069	0,0105
6						0,0001	0,0003	0,0006	0,0011	0,0019
7								0,0001	0,0001	0,0003
c	Probabilité cumulées $Pr(k \le c) = \sum_{k=0}^{c} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$									
	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0,8601	0,7386	0,6333	0,5421	0,4633	0,3953	0,3367	0,2863	0,2430	0,2059
1	0,9904	0,9647	0,9270	0,8809	0,8290	0,7738	0,7168	0,6597	0,6035	0,5490
2	0,9996	0,9970	0,9906	0,9797	0,9638	0,9429	0,9171	0,8870	0,8531	0,8159
3	1	0,9998	0,9992	0,9976	0,9945	0,9896	0,9825	0,9727	0,9601	0,9445
4		1	0,9999	0,9998	0,9994	0,9986	0,9972	0,9950	0,9918	0,9873
5			1	1	1	0,9999	0,9997	0,9993	0,9987	0,9978
6						1	1	0,9990	0,9999	0,9997
7								1	1	1

TABLE 1 (SUITE)

LOI BINOMIALE

Effectif des échantillons n = 20

k	Probabilités individuelles $Pr(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$									
	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0,8179	0,6676	0,5438	0,4420	0,3585	0,2901	0,2342	0,1887	0,1516	0,1216
1	0,1652	0,2725	0,3364	0,3683	0,3774	0,3703	0,3526	0,3282	0,3000	0,2702
2	0,0159	0,0528	0,0988	0,1458	0,1887	0,2246	0,2521	0,2711	0,2818	0,2852
3	0,0010	0,0065	0,0183	0,0364	0,0596	0,0860	0,1139	0,1414	0,1672	0,1901
4		0,0006	0,0024	0,0065	0,0133	0,0233	0,0364	0,0523	0,0703	0,0898
5			0,0002	0,0009	0,0022	0,0048	0,0088	0,0145	0,0222	0,0319
6				0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0032	0,0055	0,0089
7						0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0020
8								0,0001	0,0002	0,0004
9										0,0001

c	Probabilités cumulées $Pr(k \leqslant c) = \sum_{k=0}^{k=c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$									
	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0,8179	0,6676	0,5438	0,4420	0,3585	0,2901	0,2342	0,1887	0,1516	0,1216
1	0,9831	0,9401	0,8802	0,8103	0,7358	0,6605	0,5869	0,5169	0,4516	0,3917
2	0,9990	0,9929	0,9790	0,9561	0,9245	0,8850	0,8390	0,7879	0,7334	0,6769
3	1	0,9994	0,9973	0,9926	0,9841	0,9710	0,9520	0,9294	0,9007	0,8670
4		1	0,9997	0,9990	0,9974	0,9944	0,9893	0,9817	0,9710	0,9560
5			1	0,9999	0,9997	0,9991	0,9981	0,9962	0,9932	0,9887
6				1	1	0,9999	0,9997	0,9994	0,9987	0,9976
7						1	1	0,9999	0,9998	0,9996
8								1	1	0,9999
9										1

2-1

TABLE 2

LOI DE POISSON

k	Probabilités individuelles $Pr(k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!}$								
	m = 0,1	m = 0,2	m = 0,3	m = 0,4	m = 0,5	m = 0,6	m = 0,7	m = 0,8	m = 0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

c	Probabilités cumulées $Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{c} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$								
	m = 0,1	m = 0,2	m = 0,3	m = 0,4	m = 0,5	m = 0,6	m = 0,7	m = 0,8	m = 0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725
2	0,9998	0,9988	0,9964	0,9920	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9372
3	1	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9866
4		1	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977
5				1	1	1	0,9999	0,9998	0,9997
6							1	1	1

k	Probabilités individuelles $Pr(k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!}$								
	m = 1,0	m = 1,5	m = 2,0	m = 2,5	m = 3,0	m = 3,5	m = 4,0	m = 4,5	m = 5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337
2	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044
8		0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653
9			0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363
10				0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181
11					0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082
12					0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034
13						0,0001	0,0002	0,0006	0,0013
14							0,0001	0,0002	0,0005
15								0,0001	0,0002
16									0,0001

TABLE 2 (SUITE)

LOI DE POISSON

c	Probabilités cumulées $Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{c} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$								
	m = 1,0	m = 1,5	m = 2,0	m = 2,5	m = 3,0	m = 3,5	m = 4,0	m = 4,5	m = 5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404
2	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247
3	0,9810	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650
4	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405
5	0,9994	0,9955	0,9834	0,9579	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160
6	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622
7	1	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666
8		1	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319
9			1	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682
10				0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863
11				1	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945
12					1	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
13						1	0,9999	0,9997	0,9993
14							1	0,9999	0,9998
15								1	0,9999
16									1

TABLE 2 (SUITE)

LOI DE POISSON

k	Probabilités individuelles $Pr(k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!}$								
	m = 5,5	m = 6,0	m = 6,5	m = 7,0	m = 7,5	m = 8,0	m = 8,5	m = 9,0	m = 9,5
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027	0,0017	0,0011	0,0007
2	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107	0,0074	0,0050	0,0034
3	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286	0,0208	0,0150	0,0107
4	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573	0,0443	0,0337	0,0254
5	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916	0,0752	0,0607	0,0483
6	0,1571	0,1606	0,1575	0,1490	0,1367	0,1221	0,1066	0,0911	0,0764
7	0,1234	0,1377	0,1462	0,1490	0,1465	0,1396	0,1294	0,1171	0,1037
8	0,0849	0,1033	0,1188	0,1304	0,1373	0,1396	0,1375	0,1318	0,1232
9	0,0519	0,0688	0,0858	0,1014	0,1144	0,1241	0,1299	0,1318	0,1300
10	0,0285	0,0413	0,0558	0,0710	0,0858	0,0993	0,1104	0,1186	0,1235
11	0,0143	0,0225	0,0330	0,0452	0,0585	0,0722	0,0853	0,0970	0,1067
12	0,0065	0,0113	0,0179	0,0264	0,0366	0,0481	0,0604	0,0728	0,0844
13	0,0028	0,0052	0,0089	0,0142	0,0211	0,0296	0,0395	0,0504	0,0617
14	0,0011	0,0022	0,0041	0,0071	0,0113	0,0169	0,0240	0,0324	0,0419
15	0,0004	0,0009	0,0018	0,0033	0,0057	0,0090	0,0136	0,0194	0,0265
16	0,0001	0,0003	0,0007	0,0014	0,0026	0,0045	0,0072	0,0109	0,0157
17		0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0021	0,0036	0,0058	0,0088
18			0,0001	0,0002	0,0005	0,0009	0,0017	0,0029	0,0046
19				0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0014	0,0023
20					0,0001	0,0002	0,0003	0,0006	0,0011
21						0,0001	0,0001	0,0003	0,0005
22							0,0001	0,0001	0,0002
23									0,0001
24									

TABLE 2 (SUITE)

LOI DE POISSON

c	Probabilités cumulées $\Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{c} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$								
	m = 5,5	m = 6,0	m = 6,5	m = 7,0	m = 7,5	m = 8,0	m = 8,5	m = 9,0	m = 9,5
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008
2	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042
3	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149
4	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0746	0,0550	0,0403
5	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885
6	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649
7	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687
8	0,9044	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918
9	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218
10	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453
11	0,9890	0,9799	0,9661	0,9466	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520
12	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364
13	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981
14	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400
15	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976	0,9954	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665
16	0,9999	0,9958	0,9996	0,9990	0,9980	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823
17	1	1	0,9998	0,9996	0,9992	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911
18			1	0,9999	0,9997	0,9993	9,9987	0,9976	0,9957
19				1	0,9999	0,9997	0,9995	0,9989	0,9980
20					1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991
21						1	0,9999	0,9998	0,9996
22							1	0,9999	0,9998
23								1	0,9999
24									1

UNIVERSITE DE CERGY-POINTOISE.
L2 ECO-FIN-G
Cours de Probabilités.
Imèd CHERIF

TD 9

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire définie par :
$X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, $P(X = -1) = 3/6$, $P(X = 0) = 2/6$, $P(X = 1) = 1/6$.
1) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
2) Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires suivantes :

$$Y = 2X + 3 \; ; \; Z = X^2 \; ; \; T = X^3.$$

3) Comparer l'espérance mathématique et la variance de chacune de ces variables aléatoires avec celles de X.

Exercice 2 : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe du couple (X,Y) est définie par le tableau suivant :

$Y \setminus X$	0	1
0	1/10	2/10
1	3/10	4/10

1) Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).
2) Calculer la covariance du couple (X,Y)
3) X et Y sont-elles P-indépendantes ?

Exercice 3 : Soit X et Y deux variables aléatoires définies par :
$X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 0) = 3/4$, $P(X = 1) = 1/4$ et
$Y(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(Y = 0) = 1/3$, $P(Y = 1) = 2/3$.
1) Peut-on déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2) On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
3) Calculer la covariance du couple (X,Y).

Exercice 4 : Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 3.On tire deux boules successivement et sans remise. On associe à cette épreuve aléatoire le couple (X,Y) où X est le numéro de la première boule tirée et Y le numéro de la deuxième boule tirée.
1) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2) Calculer la covariance du couple (X,Y)
3) X et Y sont-elles P-indépendantes ?

Université de Cergy-Pontoise
Cours de Probabilités
I. Chérif
L2 Eco-Gestion

TD 10

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f.
2) Déterminer la fonction de répartition, F, de X.
3) Calculer l'espèrance mathématique, E(X), et la variance, V(X), de X.

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| > k \\ 1 + x \text{ si } |x| \leq k \end{cases}$

où k est un paramétre strictement positif.
1) Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f.
2) Déterminer la fonction de répartition, F, de X.
3) Calculer l'espérance mathématique, E(X), et la variance, V(X), de X.

Exercice 3 :

Soit f une fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} k(4x - x^2) \text{ si } x \in]0,4[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

où k est un paramétre strictement positif.
1) Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f.
2) Déterminer la fonction de répartition, F, de X.
3) Calculer l'espérance mathématique, E(X), et la variance, V(X), de X.

Exercice 4 :

Soit f une fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
1) Montrer que f est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f.
2) Déterminer la fonction de répartition, F, de X.
3) Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, et la variance, $V(X)$, de X.